Prof. Dr. Th. Bröcker

Der generische Standpunkt in der Differentialrechnung

Will man mit einem Wort auf elementarem Niveau einem Schüler sagen, was eigentlich die Grundlage der Mathematik der Neuzeit ist: das Erste, der Anfang, Das Allerwichtigste,- so kann von Mengen und Strukturen nicht die Rede sein: Das Punktum saliens der Mathematik der Neuzeit ist die Differentialrechnung.

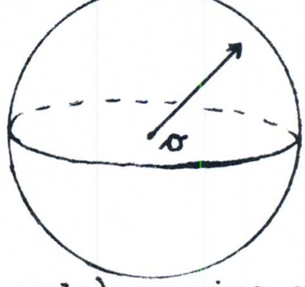
Mit ihr beginnt die Analysis, aber auch die moderne Algebra. Der erste und einfachste Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ist analytisch, er benutzt die komplexe Differentialrechnung. Die Analysis liefert die Sprache, mit der sich die Aussagen der Zahlentheorie erst formulieren lassen: Nullstellen der Zeta-Funktion, oder um ein Beispiel aus dem Anfängerunterricht zu geben

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

Eine Formel, viel erstaunlicher und tiefer als alles, was man über Mengen und Strukturen herumredet; und sie fällt einem zu mit der Taylorschen Formel. So ist die Differentialrechnung auch das erste, was man lernen muß, wenn man etwas von der Geometrie in der Mathematik der Neuzeit verstehen will: Der Geometrie nicht linearer Gleichungen. Betrachten wir als einfaches Beispiel die Gleichung

$x^2 + y^2 + z^2 = a.$

Für $a > 0$ bilden die Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, die dieser Gleichung genügen, eine Sphäre mit Radius $\sqrt{a}$ um den Ursprung. Die eine Gleichung in 3 Variablen definiert also eine 2-dimensionale Menge, und das bestätigt einen gern geübten Schluß: Mit jeder "neuen" Gleichung (Nebenbedingung) wird die Dimension (die Zahl der Freiheitsgrade) um eins erniedrigt.



Hätten wir allerdings $a < 0$ gewählt, so hätte unsere Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a$$

keine Lösung im $\mathbf{R}^3$, und zur Bestätigung unseres Vorurteils über die Zahl der Freiheitsgrade müßten wir der leeren Menge die Dimension 2 zuteilen. In der Tat hat ja die neue Mathematik zu solcher Einsicht in das Wesen der leeren Menge geführt, daß man leicht einsieht: Man darf ihr jede beliebige Dimension ohne Widerspruch zuerkennen.

Für $a = 0$ ergibt sich aber

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

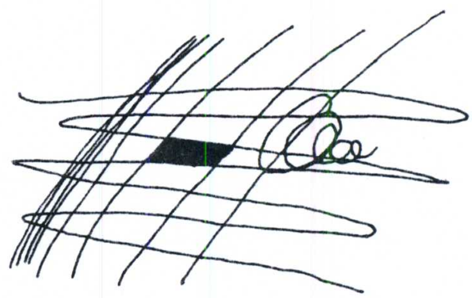
mit der einzigen Lösung $x = y = z = 0$, also ein Punkt, eine 0-dimensionale Lösungsmenge. Immerhin hat die Lösungsmenge doch noch überhaupt eine Dimension, und sie ist auch kleiner als drei. Auch das braucht aber nicht der Fall zu sein, ja in der Theorie der differenzierbaren Funktionen (damit meine ich immer: Beliebig oft differenzierbar) ist gewissermaßen das Gegenteil richtig.

<u>Satz</u> (H.Whitney)
Jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ ist Lösungsmenge einer Gleichung

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

für eine geeignete beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}.$$



Man male also hin was man will, es sei noch so häßlich und ohne vernünftige Dimension, immer läßt sich eine Gleichung $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ finden, deren Lösungsmenge das Gemälde ist.

So scheint es auf den ersten Blick nicht möglich, eine geometrische Theorie der Lösungsmengen beliebiger (differenzierbarer) Gleichungen zu entwickeln, weil es den Lösungsmengen an Struktur fehlt.

Der klassische Ausweg ist, daß man von vornherein Gleichungen studiert, die z.B. durch Polynome gegeben sind, wie unser obiges Beispiel. Der Nachteil ist, daß solche Gleichungen schon ganz festgelegt sind, wenn man sie nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes kennt: Das Lokale bestimmt das Globale. Dieses Verhalten ist oft nicht natürlich.

Was ich im Titel meines Vortrags den "generischen Standpunkt" genannt habe, bezeichnet eine andre Methode, allzu pathologische Funktionen gleichsam in Sicherheitsverwahrung zu nehmen, und bei Strukturuntersuchungen als Störelemente von geringer Bedeutung auszuschließen: eine Methode, die aus der Differentialrechnung selbst kommt. Ohne mich auf allzu Technisches einzulassen, will ich dazu soviel andeuten:
Wenn ich von einer Funktion (einer "Störung")

$$\delta : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

voraussetze, daß sie "genügend klein" ist, so meine ich: Nicht nur ihre Werte an jeder Stelle, sondern auch die Werte der Ableitungen höherer Ordnung sind genügend klein - wie klein, das kann auch noch vom Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ abhängen.

Wenn zum Beispiel eine Glasscheibe beschlägt, so ist die Veränderung der Oberfläche im metrischen oder maßtheoretischen

Sinne sehr gering, in unserem Sinne aber sehr groß, und sehr groß sind auch die optischen Auswirkungen. Wir suchen aber gerade nach Begriffen für eine Beschreibung stabiler geometrischer Formen,- Gestalten, die durch kleine Störungen nicht vernichtet werden.

Wir nennen nun eine Eigenschaft differenzierbarer Funktionen

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

<u>stabil</u>, wenn gilt: Hat f die Eigenschaft, und ist $\delta:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genügend klein, so hat auch $f + \delta$ die Eigenschaft.

Beispiele stabiler Eigenschaften:

(1) $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, mit $Df = (\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n)$.

(3) wenn $f(x) = 0$, so ist $Df(x) \neq 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Statt von stabilen Eigenschaften von Funktionen kann man auch von stabilen Mengen von Funktionen reden.

Eine stabile Eigenschaft (oder eine stabile Menge) von Funktionen heißt <u>generisch</u>, wenn die Menge dicht ist, also wenn gilt:

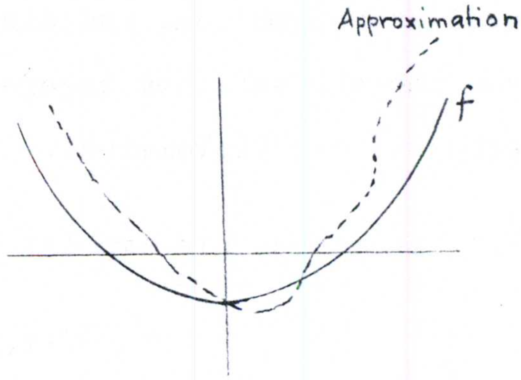
Ist $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ irgendeine differenzierbare Funktion, so kann man eine beliebig kleine Funktion $\delta:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so wählen, daß $f + \delta$ in der Menge ist.

Die Mengen (Eigenschaften) (1), (2) sind nicht generisch.

Zum Beispiel die Funktion $f:\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 1$$

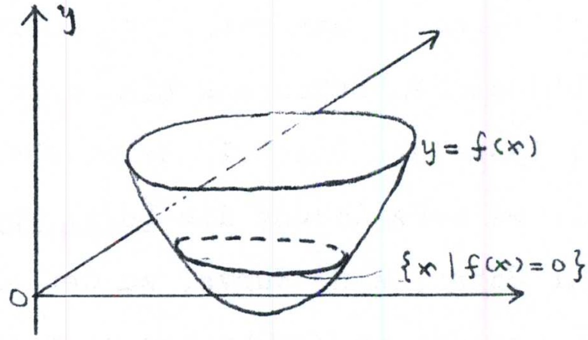
hat zwei Nullstellen und ein absolutes Minimum, wo Df = 0, und dasselbe gilt für jede Approximation von f, die auch die Ableigungen bis zur 2.Ordnung genügend gut approximiert. Jedoch gilt (einen Spezialfall nach einem viel allgemeineren Satz zu nennen) der



<u>Satz von Sard:</u> Die Eigenschaft (3) ist generisch.

Es ist auch leicht zu sehen, daß für eine Funktion mit der Eigenschaft (3) (der Graph von f geht durch das Nullniveau mit Steigung $\neq 0$) gilt:

Die Menge $\{x \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist (n-1) -dimensional.



Es ist ein sinnvolles und aussichtsreiches Unternehmen, die Geometrie differenzierbarer Funktionen zu untersuchen, wenn man sich darauf beschränkt, Behauptungen nicht über alle Funktionen zu machen, sondern nur über geeignete generische Mengen von Funktionen - man sagt dazu mit einem gewissen Recht: Die Behauptungen gelten für <u>fast alle</u> Funktionen.

Insbesondere in der Theorie der Differentialgleichungen hat dieser Gesichtspunkt zu großen Erfolgen geführt, und ich will dazu ein Beispiel etwas genauer erläutern, das wie alles, was ich hier erzähle, von René Thom stammt. Von ihm stammen jedenfalls die zum Erfolg führenden Ansätze und Hinweise; zur Durchführung blieb dann allerdings viel Arbeit zu tun, und die Ergebnisse im einzelnen weichen auch von dem ab, was Thom angegeben hat. Hier beschreibe ich die Ergebnisse der Diplomarbeit von D.Michaelis (Regensburg).

Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

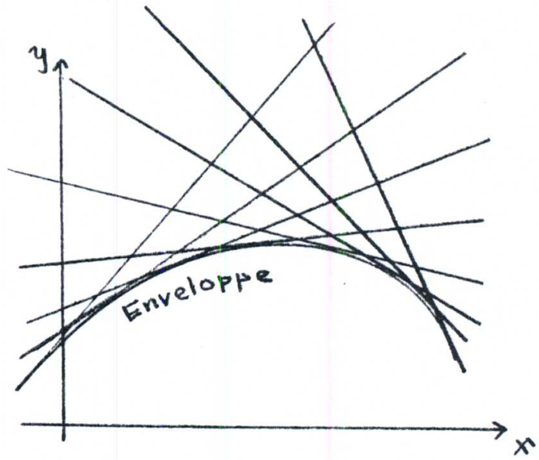
$$f(x,y,y') = 0.$$

Sie ist durch eine differenzierbare Funktion $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeben, für die wir auch $f(x,y,z)$ schreiben.

Beispiel: Clairautsche Gleichung

$$y - y'x - g(y') = 0$$

Lösungen $y = ax + g(a)$ für einen Parameter $a \in \mathbf{R}$, also eine Schar von Geraden, parametrisiert durch die Steigung a, mit einem von a abhängenden Durchgang g(a) durch die y-Achse. Das Bild zeigt aber als weitere Lösung die Enveloppe der Schar, eine Kurve, zu der alle Geraden im Berührungspunkt tangential sind.



Die Enveloppe ist in diesem Fall zugleich der Ort derjenigen Punkte $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, wo die Gleichung $f(x,y,y') = 0$ nicht differenzier nach y' auflösbar ist, der sogenannte singuläre Ort der Differentialgleichung.

Wir können nun fragen, ob das hier gefundene Verhalten wohl typisch - generisch - ist, oder ob die Clairautsche Gleichung ein ganz unwahrscheinlicher Sonderfall ist. Es zeigt sich in der Tat das Letztere.

Im allgemeinen wird die Gleichung $f(x,y,z) = 0$, so haben wir eben gelernt, eine Fläche

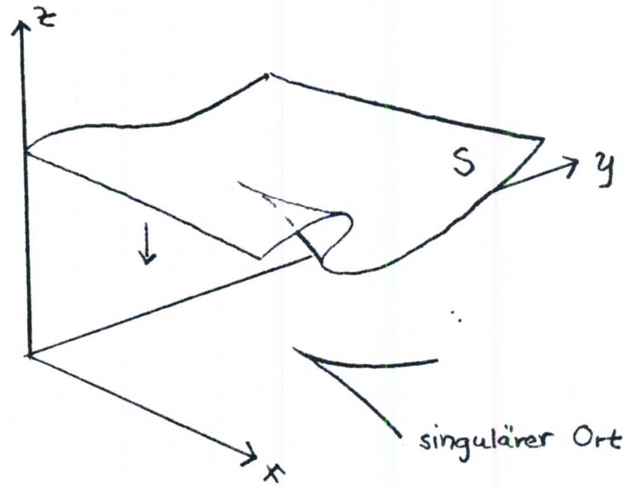
$$S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

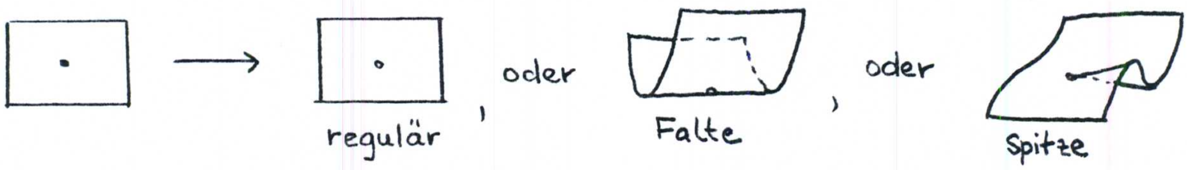
definieren, und wenn wir fragen, ob sich die Gleichung (lokal um einen Punkt) nach y'- also nach der Variablen z-auflösen läßt, so fragen wir, ob man einem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal auf differenzierbare Weise einen Punkt $(x,y,z) \in S$ über (x,y) zuordnen kann. Wie - so müssen wir fragen - sieht nun im allgemeinen (generisch) die Abbildung

$$S \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \to (x,y)$$

die Projektion der Fläche S auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ aus?

Die Antwort hat im wesentlichen H. Whitney (1955) gegeben:
Eine Abbildung einer Fläche auf die Ebene ist fast immer lokal im wesentlichen durch eines der drei folgenden Modelle gegeben:

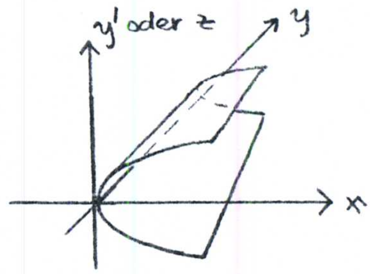




Der singuläre Ort der Differentialgleichung ist also ein System von Kurven mit Spitzen auf der Ebene, und in den singulären Punkten hat man (für eine generische Menge von Gleichungen) gute Information über das lokale Verhalten der Differentialgleichung. An einem Faltenpunkt treffen zwei Lösungsscharen zusammen, die zu den zwei verschiedenen Blättern der Fläche S, dem oberen und dem unteren Blatt der Falte, gehören.

Es ist nun auch leicht zu raten, wie die Lösungen in der Nähe der Falte im allgemeinen aussehen werden: Das Standardmodell der Falte ist, daß f die Form

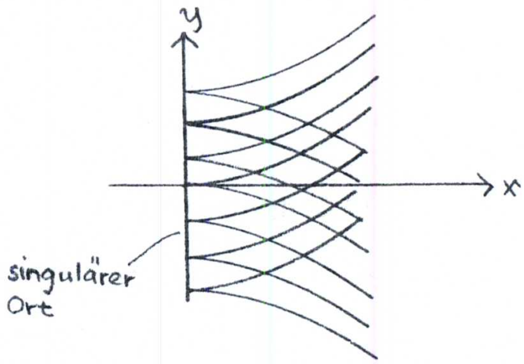
$$f(x,y,y') = y'^2 - x$$



hat, die DGl ist also

$$y' = \pm \sqrt{x}$$

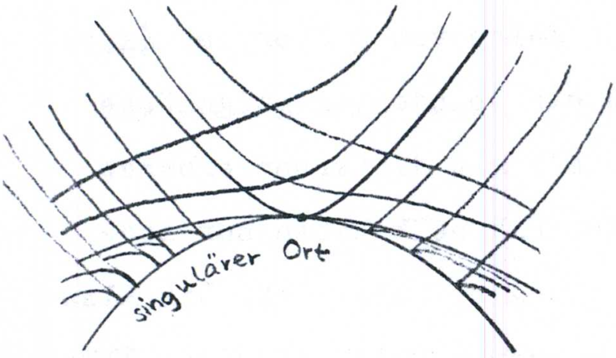
mit den Lösungen $y = \pm x^{\frac{3}{2}} + a$.

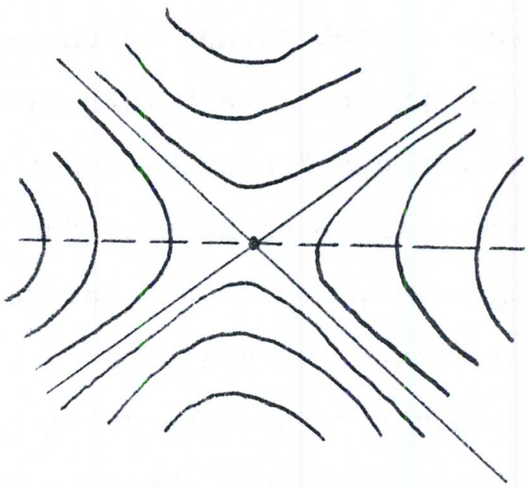


In der Tat ist dies das Aussehen der Lösungen, für eine generische Menge von Gleichungen, an allen Stellen der singulären Kurve bis auf isolierte Punkte, wo die Lösungen tangential zur singulären Kurve werden. "Das Aussehen", das heißt in diesem Fall: Bis auf einmal stetig differenzierbare Transformation.

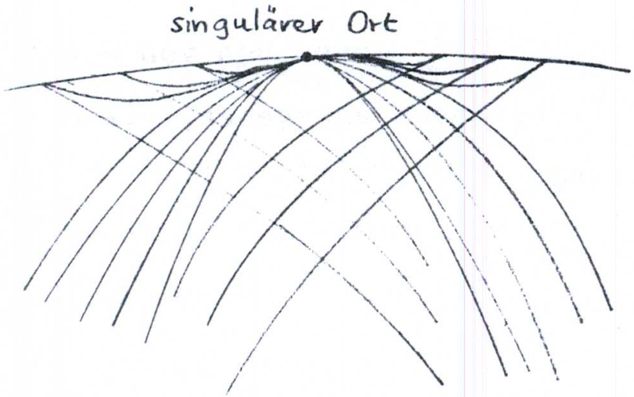
An einzelnen Punkten können die Lösungen tangential zur singulären Kurve werden, und da gibt es bis auf topologische Transformation (für eine generische Menge von Gleichungen) nur drei lokale Modelle:

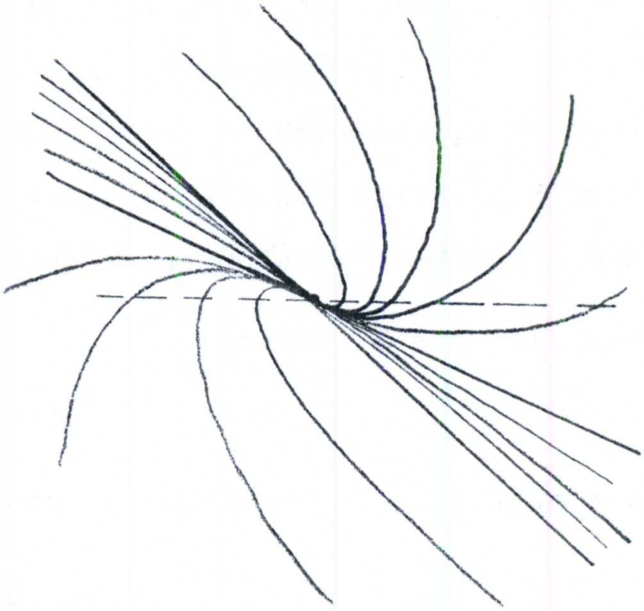
Der Sattel



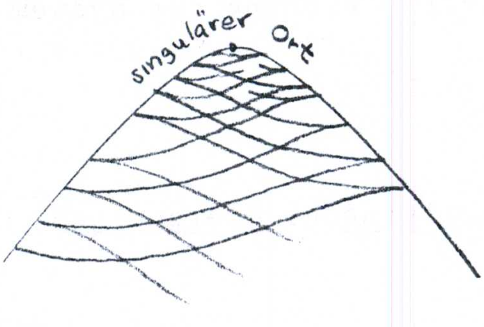


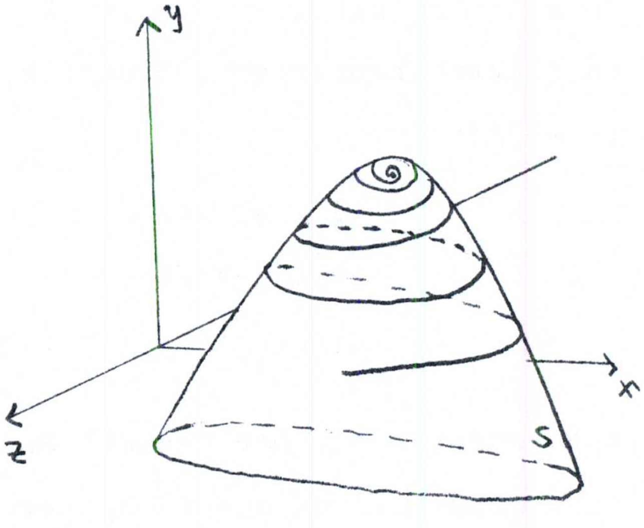
Der Knoten





Die Spirale





Diese Bilder kommen folgendermaßen zustande:

Den zwei verschiedenen Lösungsscharen, die durch jeden Punkt gehen, entsprechen die beiden Blätter der Falte von S über der (x,y)-Ebene. Auf der Fläche S selbst hat man eine eindeutig aufgelöste Differentialgleichung (die "Hamiltonsche") mit differenzierbarer Lösungsschar, und diese Lösungen auf der Fläche S haben nur isolierte Punkte, wo die Differentialgleichung verschwindet. Die Klassifikation der generischen Singularitäten ebener DGl. auf einer Fläche findet man im Grunde schon in den alten Lehrbüchern: Es gibt nur Sattel, Knoten, Spirale. Ihre Bilder zeige ich neben den zugehörigen Bildern für die implizite Differentialgleichung. Jetzt muß man nur studieren, wie sich diese Singularitäten auf S, generisch von S auf die (x,y)-Ebene hinunterprojizieren. Es sei noch angegeben, wie die Hamiltonschen Gleichungen definiert sind:

Faßt man die Gleichung

$$f(x,y,y') = 0$$

als partielle Differentialgleichung erster Ordnung auf:

$$f(x,y,\partial y/\partial x) = 0,$$

so erinnert man sich aus den Vorlesungen über diesen Gegenstand, oder über theoretische Mechanik, daß dieser Gleichung das System ($\cdot = d/dt$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial f/\partial z, \\ \dot{y} &= z\cdot\partial f/\partial z, \qquad\qquad \underline{\text{Hamiltonsche}}\ \underline{\text{Gleichungen}}, \\ \dot{z} &= -\,(\partial f/\partial x + z\cdot\partial f/\partial y) \end{aligned}$$

zugeordnet wird. Man rechnet sofort nach: Ist (x(t), y(t), z(t)) eine Lösungskurve dieses Systems, so ist f(x(t), y(t), z(t)) konstant (die Ableitung nach t verschwindet) und insbesondere bleiben Lösungen auf S, wenn sie dort beginnen: Das System definiert demnach auch eine Differentialgleichung auf $S = \{(x,y,z) | f = 0\}$. Auch ist für eine Lösung der Hamiltonschen Gleichungen stets

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{z \cdot \partial f/\partial z}{\partial f/\partial z} = z$$

also $f(x,y,dy/dx) = 0$, sie liefert eine Lösung der impliziten Gleichung $f = 0$, und legt sie (wo man zwischen mehreren wählen kann) durch Angabe von y' fest.

Nun steht der Gradient

$$(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z) \text{ senkrecht auf } S = \{f = 0\}.$$

Wenn die Hamiltonschen Gleichungen verschwinden, ist jedenfalls $\partial f/\partial z = 0$ (der Normalvektor von S parallel zur (x,y)-Ebene, der Punkt singulär bei Projektion), und außerdem ist

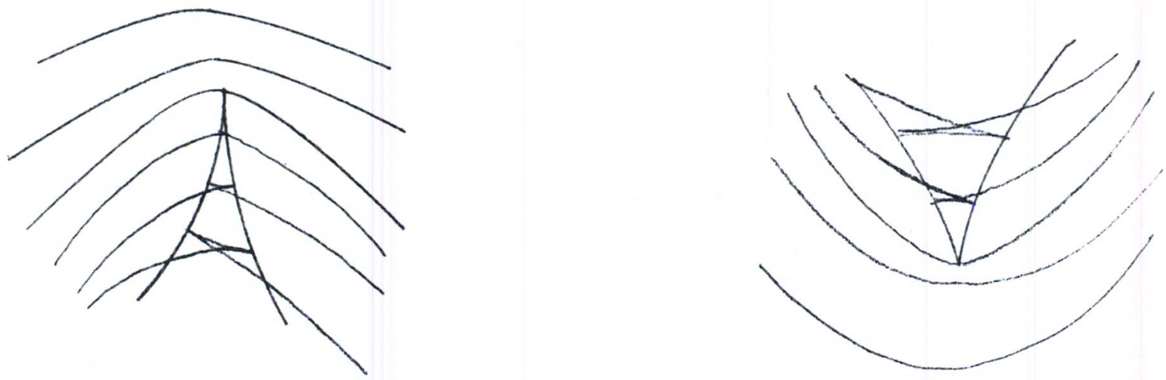
$$\partial f/\partial x + z\ \partial f/\partial y = 0, \quad \text{also}$$

$$(1,z) \perp (\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y) \text{ auf der Ebene.}$$

Aber $(1,z) = (1,y')$ ist ein Tangentialvektor an die Lösung von $f(x,y,y') = 0$ und $(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)$ steht senkrecht auf dem singulären Ort, der singuläre Ort wird also parallel zur Lösung.

So also sieht man: Die Punkte, wo das Hamiltonsche System singulär wird, entsprechen bei Projektion denen, wo die Lösungen von $f(x,y,y')$ parallel zum singulären Ort sind. Das lokale Verhalten der Lösungen der impliziten Gleichung entsteht aus dem lokalen Verhalten der Hamiltonschen Gleichungen durch Projektion. Das ist der Weg, auf dem man zu den erklärten Aussagen kommt; natürlich nicht ohne Mühe.

Auch das Verhalten in den Spitzenpunkten läßt sich gut beschreiben, es gibt im wesentlichen zwei Bilder



Aber während die drei vorgenannten Bilder einer topologischen (doch nicht mehr differenzierbaren) Klassifikation entsprechen, sind hier unendlich viele topologisch verschiedene Systeme möglich. In der Spitze treffen sich drei Kurvenscharen; wenn man zwei auf Normalform gebracht hat, ist auch die Freiheit der Koordinatenwahl im wesentlichen erschöpft, und die dritte Kurvenschar läßt sich nicht mehr in eine Normalgestalt bringen, wenn sie auch "ziemlich" festliegt.

So sieht man an einem einfachen Beispiel, wie der generische Standpunkt eine reiche Geometrie in der Theorie der Differentialgleichungen aufdeckt, und den richtigen Instinkt der Alten für das Wichtige und Natürliche durch ein wohldefiniertes Prinzip der Auswahl ersetzt.